

Maths - DM4

Problème : coefficient d'asymétrie d'une loi géométrique.

1. On considère l'ensemble E défini par :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = 0\}$$

et les polynômes : $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x(x-1)$, $f_3 : x \mapsto x(x-1)(x-2)$,

- (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et donner sa dimension.
 - (b) Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de E .
 - (c) Vérifier que les polynômes $e_2 : x \mapsto x^2$ et $e_3 : x \mapsto x^3$ appartiennent à E et déterminer les coordonnées de e_2 et e_3 dans la base (f_1, f_2, f_3)
2. On considère la fonction définie pour tout x de $[0; 1[$ par $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on admet que pour tout $n \geq 1$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \dots (k-n+1) x^{k-n}$$

- (a) Calculer :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} ; \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-1} ; \quad \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)x^{k-1}$$

- (b) En utilisant (2a) et (1c), calculer pour tout $p \in]0, 1[$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1-p)^{k-1} ; \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^3(1-p)^{k-1}$$

3. On appelle coefficient d'asymétrie d'une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 3, le réel γ définie par :

$$\gamma = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

où μ est l'espérance de X et σ est son écart type.

Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

- (a) En utilisant la question 2b exprimer $E(X^2)$ et $E(X^3)$ en fonction du paramètre p .

- (b) Vérifier que $\gamma = \frac{E[(pX - 1)^3]}{(1-p)^{\frac{3}{2}}}$. Développer $(pX - 1)^3$ et en déduire que $\gamma = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$.